





# Prefeitura Municipal de Grão-Pará

ESTADO DE SANTA CATARINA

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA

Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes das equações são nulos.

**Exemplo:**  $S_3 = \begin{cases} 6x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Todo sistema linear homogêneo admite solução nula  $(0,0,\dots,0)$ , chamada de **solução trivial**.

Um sistema linear homogêneo **pode ter outras soluções além da trivial**.

---

## REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais.

A regra de Cramer é uma estratégia para resolução de sistemas de equações lineares utilizando o cálculo dos determinantes.

Esta técnica foi criada pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) por volta do século XVIII com o intuito de solucionar sistemas com um número arbitrário de incógnitas.

**Exemplo 1:**  $\begin{cases} 12x + 3y = 15 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

**1º passo:** calcular o determinante da matriz de coeficientes.

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = 12 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 = -36 - 6 = -42$$



# *Prefeitura Municipal de Grão-Pará*

ESTADO DE SANTA CATARINA

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA

**2º passo:** calcular  $D_x$  substituindo os coeficientes da primeira coluna pelos termos independentes.

$$M_x = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D_x = 15 \cdot (-3) - 3 \cdot 13 = -45 - 39 = -84$$

**3º passo:** calcular  $D_y$  substituindo os coeficientes da segunda coluna pelos termos independentes.

$$M_y = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$D_y = 12 \cdot 13 - 15 \cdot 3 = 156 - 30 = 126$$

**4º passo:** calcular o valor das incógnitas pela regra de Cramer.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-84}{-42} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{126}{42} = -3$$

Portanto,  $x = 2$  e  $y = -3$ .

**S = (2,-3)**

**Exemplo 2-**

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

**1º passo:** calcular o determinante da matriz de coeficientes.



# Prefeitura Municipal de Grão-Pará

ESTADO DE SANTA CATARINA

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Para isto, primeiramente, escrevemos os elementos das duas primeiras colunas ao lado da matriz.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

Agora, multiplicamos os elementos das diagonais principais e somamos os resultados.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ & \nwarrow & \nwarrow & \nwarrow & \end{matrix}$$

Diagonais principais

$$\begin{matrix} 1 \cdot 2 \cdot 2 & + & 1 \cdot (-1) \cdot 1 & + & 1 \cdot 4 \cdot 3 \\ 4 & & -1 & & + 12 \end{matrix}$$

Seguimos multiplicando os elementos das diagonais secundárias e invertemos o sinal do resultado.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \end{matrix}$$

Diagonais secundárias

$$\begin{matrix} - & 1 \cdot 2 \cdot 1 & - & 1 \cdot (-1) \cdot 3 & - & 1 \cdot 4 \cdot 2 \\ -2 & & + 3 & & - 8 \end{matrix}$$



# *Prefeitura Municipal de Grão-Pará*

**ESTADO DE SANTA CATARINA**

**SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA**

Posteriormente, juntamos os termos e resolvemos as operações de adição e subtração para obter o determinante.

$$D = 4 - 1 + 12 - 2 + 3 - 8 = 8$$

**2º passo:** substituir os termos independentes na primeira coluna da matriz e calcular  $D_x$ .

$$M_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos  $D_x$  da mesma maneira que encontramos o determinante da matriz.

$$M_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \\ 13 & 3 \end{matrix}$$

$$D_x = 6.2.2 + 1.(-1).13 + 1.5.3 - 1.2.13 - 6.(-1).3 - 1.5.2$$

$$D_x = 8$$

**3º passo:** substituir os termos independentes na segunda coluna da matriz e calcular  $D_y$ .

$$M_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \\ 1 & 13 \end{matrix}$$

$$D_y = 1.5.2 + 6.(-1).1 + 1.4.13 - 1.5.1 - 1.(-1).13 - 6.4.2$$

$$D_y = 16$$

**4º passo:** substituir os termos independentes na terceira coluna da matriz e calcular  $D_z$ .



# Prefeitura Municipal de Grão-Pará

ESTADO DE SANTA CATARINA

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA

$$M_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$D_z = 1.2.13 + 1.5.1 + 6.4.3 - 6.2.1 - 1.5.3 - 1.4.13$$

$$D_z = 24$$

5º passo: aplicar a regra de Cramer e calcular o valor das incógnitas.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{8} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{24}{8} = 3$$

Portanto,  $x = 1$ ;  $y = 2$  e  $z = 3$ .

**S = (1,2,3)**

## DICA – VIDEOAULA



Conceitos Iniciais

<https://www.youtube.com/watch?v=mw0mEZ4DBsk>



Exemplos 2x2

[https://www.youtube.com/watch?v=c3cK5W1k\\_zc](https://www.youtube.com/watch?v=c3cK5W1k_zc)



# Prefeitura Municipal de Grão-Pará

ESTADO DE SANTA CATARINA

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA



Exemplos 3x3

[https://www.youtube.com/watch?v=-tdj\\_vMekdg&t=246s](https://www.youtube.com/watch?v=-tdj_vMekdg&t=246s)



Outros exemplos 3x3, com dicas diferentes.

<https://www.youtube.com/watch?v=fPrahttt2wc>



## EXERCÍCIOS



1 - Resolva os sistemas de duas equações, aplicando a Regra de Cramer:

a) 
$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

2 – Resolva os sistemas de três equações, aplicando a Regra de Cramer:

a) 
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x - 4y + 3z = -1 \\ 2x - y - z = -5 \\ x - 3y - z = -6 \end{cases}$$